CONSTRUCCIONES DE POLÍGONOS REGULARES CON REGLA Y COMPÁS CON LA ASISTENCIA DEL GEOGEBRA

Antonio Sángari y **Clara Perez**
Universidad Nacional de Salta, Argentina
asangari2000@gmail.com, pame-pe-05@hotmail.com

Nos proponemos estudiar las construcciones de polígonos regulares con regla y compás con la asistencia del GeoGebra, y presentar una secuencia de acciones que pueden resultar de base para enseñar estos conceptos. Para un mejor aprovechamiento de este trabajo, los lectores deberían tener nociones de geometría, particularmente estar familiarizados con los problemas de construcciones con regla y compás. También es recomendable tener conocimientos de estructuras algebraicas, especialmente de extensiones de cuerpos. Por estos motivos está dirigido a docentes de educación terciaria y a estudiantes que tengan los conocimientos mencionados anteriormente.

EL PROBLEMA

Las construcciones con regla y compás siempre han llamado la atención de los matemáticos y de los profesores de matemática, surgiendo de esta manera múltiples interrogantes y resultados interesantes.

En cuanto a lo que en esta ponencia nos proponemos, partamos de la pregunta: ¿Será siempre posible construir un polígono regular (con regla y compás)? Y en los casos que fuera posible, ¿cómo se construyen? Sabemos que la respuesta a la primera pregunta es no, y que los únicos polígonos regulares construibles son aquellos cuya descomposición en factores primos del número de lados es un producto de primos de Fermat por potencias de dos. Además, los primos de Fermat que aparecen, lo hacen solamente a la primera potencia. La justificación de estos hechos requiere un poco de esfuerzo y algún conocimiento de álgebra que no desarrollaremos en esta ponencia.

Responderemos la segunda pregunta con algún detalle. La construcción de triángulos equiláteros, incluso de pentágonos regulares, se encuentra con alguna frecuencia en textos básicos de geometría, pero no es tan común la construcción, por ejemplo, del heptadecágono regular.

Sángari, A. y Pérez, C. (2011). Construcciones de polígonos regulares con regla y compás con la asistencia del GeoGebra. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 20º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 307-314). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Pero además de justificar algebraicamente las construcciones, para lo cual nos valimos de Hungerford (1974), estamos interesados en realizarlas con asistencia del software libre GeoGebra. Esta decisión se fundamenta en la agilidad y eficiencia del software en contraposición a los elementos de uso tradicional en geometría (regla y compás).

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Convenios y notaciones

A lo largo de este documento usaremos los siguientes convenios: a la recta OU le llamaremos abscisa, a la semirrecta OU lado derecho o positivo; el punto O diremos que tiene abscisa 0 y que es el origen y, al punto U le asignamos la abscisa 1.

Si a un punto cualquiera lo designamos con una letra mayúscula de imprenta, a la longitud del segmento determinado por este punto y el origen lo designamos con una letra minúscula de imprenta, por ejemplo a la longitud del segmento OC lo designamos por c.

Si es posible construir las raíces complejas de la ecuación: $x^n - 1 = 0$ para algún n determinado, podremos construir los vértices de un n-gono regular de radio unitario. Si n cumple con las condiciones de constructibilidad enunciadas más arriba, el problema se reduce a encontrar la primera raíz compleja de la ecuación $x^n - 1 = 0$. Más concretamente, si encontramos la parte real de dicha raíz, trazando una perpendicular al eje real por ese punto habremos encontrado la raíz buscada.

Nos centramos primeramente en los casos en que n es un primo de Fermat $2^{2^m} + 1$ con $m \in \mathrm{N}$.

La ecuación $x^n - 1 = 0$ factorizada resulta: $(x-1)(x^{n-1} + \cdots + x + 1) = 0$

Ahora bien, llamemos $P_{n-1} = x^{n-1} + \cdots + x + 1$. Si encontramos la primera raíz de P_{n-1}, habremos resuelto el problema. Hallar las raíces de P_{n-1} consistirá en resolver ecuaciones cuadráticas, tantas como sean necesarias. Detallaremos en la exposición de los métodos utilizados para construir los distintos polígonos el por qué de esta consideración.

En la sección Apéndice, explicamos el método utilizado para construir la raíz cuadrada de un número y las raíces de una ecuación cuadrática.

Construcción del triángulo equilátero

En este caso: $P_2 = x^2 + x + 1$ y sus raíces son: $\zeta_1 = -1/2 + \sqrt{3/2}i$ $\zeta_2 = -1/2 - \sqrt{3/2}i$.

Construyendo el punto de abscisa $-1/2$ y la perpendicular al eje real por ese punto, tendremos construidas las raíces intersecando dicha recta con la circunferencia de radio unidad centrada en el origen.

Construcción algebraica del pentágono regular

En este caso: $P_4 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$. Sean $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ las raíces de este polinomio. Debemos recordar que las mismas son complejas conjugadas de a pares.

Llamemos:

$$\lambda_1 = \zeta_1 + \zeta_4 = 2\mathrm{Re}(\zeta_1) \qquad \lambda_2 = \zeta_2 + \zeta_3 = 2\mathrm{Re}(\zeta_2)$$

y observando que

$$\zeta_1\zeta_4 = 1 \qquad \zeta_2\zeta_3 = 1$$

obtenemos que, $\zeta_1 \; y \; \zeta_2$, por propiedades de las raíces de ecuaciones cuadráticas, son raíces de $x^2 - \lambda_1 x + 1 = 0 \quad (3)$, y $\zeta_3 \; y \; \zeta_4$ son las raíces de $x^2 - \lambda_2 x + 1 = 0 \quad (4)$.

Las raíces de las ecuaciones (3) y (4) respectivamente son:

$$x_{1,2} = \frac{\lambda_i}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda_i}{2}\right)^2 - 1} \qquad i = 1,2$$

Por otro lado notemos que:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -1, \text{ pues } \lambda_1 + \lambda_2 = \zeta_1 + \zeta_4 + \zeta_2 + \zeta_3 = \zeta_1 + \zeta_1^4 + \zeta_1^2 + \zeta_1^3 = -1$$

Y además que:

$$\lambda_1\lambda_2 = -1, \text{ pues } \lambda_1\lambda_2 = (\zeta_1 + \zeta_4)(\zeta_2 + \zeta_3) = \zeta_1 + \zeta_1^4 + \zeta_1^2 + \zeta_1^3 = -1$$

Por lo tanto, λ_1 y λ_2 son las raíces de la ecuación $x^2 + x - 1 = 0$.

Así:

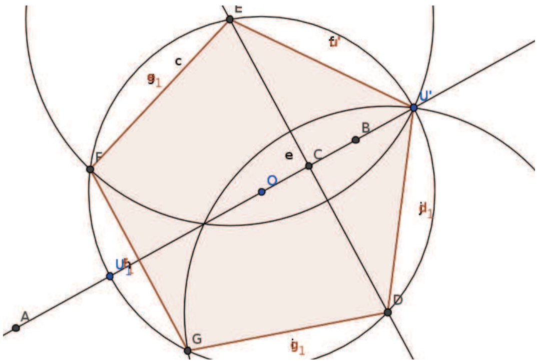
$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} \qquad \lambda_2 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1}$$

Construyendo $\lambda_1/2$, teniendo en cuenta que $\lambda_1/2 = \mathrm{Re}(\zeta_1)$, trazamos la perpendicular por ese punto a la recta OU, de tal manera que las intersecciones con la circunferencia de radio unidad centrada en O, nos proporcionan las raíces ζ_1 y ζ_4

El pentágono quedará finalmente construido trazando dos circunferencias con centro en ζ_1 y ζ_4 respectivamente y que pasen por el punto U. Las intersecciones con la circunferencia centrada en el punto O de radio unidad nos proporcionan las raíces faltantes, ζ_2 y ζ_3.

Construcción geométrica del pentágono regular

Contando con la herramienta para la resolución geométrica de la ecuación $x^2 + x - 1 = 0$, que es la primera que aparece en la construcción del pentágono regular tenemos que los datos de entrada son $O,\ U,\ -U$ y U para la segunda herramienta, o sea la que tiene un signo + en el argumento de la raíz. Con la aplicación de esta herramienta, obtenemos los puntos A y B que tienen respectivamente abscisas λ_2 y λ_1. Los puntos de intersección de la circunferencia unitaria con la mediatriz del segmento OB, son dos vértices del pentágono regular. Los otros vértices se obtienen fácilmente usando el compás.



Construcción del heptadecágono regular

En este caso $P_{16} = x^{16} + \cdots + x + 1$. Sean $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_{15}, \zeta_{16}$ las raíces de este polinomio, las cuales son complejas conjugadas de a pares, en este caso, ζ_1 y ζ_{16} son conjugas, también ζ_2 y ζ_{15} ; ζ_3 y ζ_{14}; ζ_4 y ζ_{13}; …, etc.

Llamemos: $\lambda_1 = \zeta_1 + \zeta_{16} = 2\mathrm{Re}(\zeta_1)$; $\lambda_2 = \zeta_2 + \zeta_{15}$; $\lambda_3 = \zeta_3 + \zeta_{14}$; $\lambda_4 = \zeta_4 + \zeta_{13}$;

$$\lambda_5 = \zeta_5 + \zeta_{12}\,;\ \lambda_6 = \zeta_6 + \zeta_{11}\,;\ \lambda_7 = \zeta_7 + \zeta_{10}\,;\ \lambda_8 = \zeta_8 + \zeta_9$$

y teniendo en cuenta que $\zeta_1\zeta_{16} = 1$; $\zeta_2\zeta_{15} = 1$; $\zeta_3\zeta_{14} = 1$; $\zeta_4\zeta_{13} = 1$; $\zeta_5\zeta_{12} = 1$; $\zeta_6\zeta_{11} = 1$; $\zeta_7\zeta_{10} = 1$; $\zeta_8\zeta_9 = 1$, deducimos que: ζ_1 y ζ_{16} son raíces de la ecuación $x^2 - \lambda_1 x + 1 = 0$

y además:

$$\zeta_i \text{ y } \zeta_j \text{ son raíces de } x^2 - \lambda_i x + 1 = 0 \text{ con } i + j = 17 \text{ y } 1 \le i \le 8$$

Ahora hagamos:

$$\xi_1 = \lambda_1 + \lambda_4\,;\ \xi_2 = \lambda_2 + \lambda_8\,;\ \xi_3 = \lambda_3 + \lambda_5\,;\ \xi_4 = \lambda_6 + \lambda_7$$

Y calculando los productos obtenemos que:

$$\lambda_1\lambda_4 = \xi_3\,;\ \lambda_2\lambda_8 = \xi_4\,;\ \lambda_3\lambda_5 = \xi_2\,;\ \lambda_6\lambda_7 = \xi_1$$

Con lo que deducimos, por ejemplo que:

$$\lambda_1 \text{ y } \lambda_4 \text{ son raíces de la ecuación } x^2 - \xi_1 x + \xi_3 = 0\ .$$

Seguidamente, llamamos:

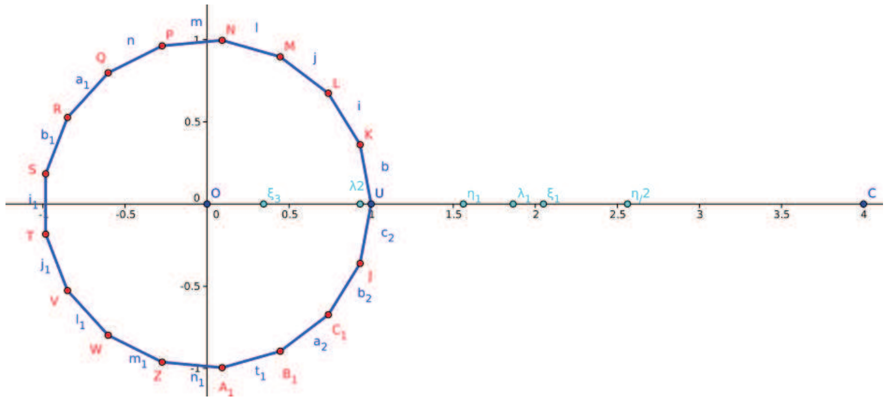
$$\eta_1 = \xi_1 + \xi_2 = \lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_2 + \lambda_8\,;\ \eta_2 = \xi_3 + \xi_4 = \lambda_3 + \lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7$$

Teniendo en cuenta que $\eta_1 + \eta_2 = -1$ y $\eta_1\eta_2 = -4$ inferimos que η_1 *y* η_2 son raíces de la ecuación: $x^2 + x - 4 = 0$.

Además se comprueba que ξ_1 *y* ξ_2 son raíces de $x^2 - \eta_1 x - 1 = 0$ y que ξ_3 *y* ξ_4 son raíces de $x^2 - \eta_2 x - 1 = 0$.

Por lo tanto $\eta_1 \approx 1{,}5615528128088...$ y $\eta_2 \approx -2{,}5615528128088...$. Estos datos nos permiten ascender gradualmente hasta construir ζ_1.

Tal como fueron calculados η_1 y η_2, se calcula λ_1 que resulta ser $\lambda_1 \approx 1{,}8649657832962...$ y recordando que $\lambda_1 = \zeta_1 + \zeta_{16} = 2\mathrm{Re}(\zeta_1)$, es decir, $\lambda_1 / 2 = \mathrm{Re}(\zeta_1)$, trazando por ese punto la perpendicular a la recta OU, obtenemos ζ_1 y su conjugada sin más que marcar las intersecciones con la circunferencia con centro en el punto O y radio unidad.



APÉNDICE

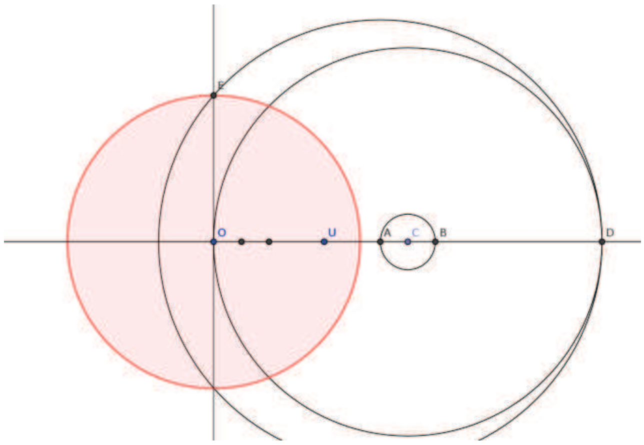
Creación de una herramienta para encontrar gráficamente una raíz cuadrada con GeoGebra

Una característica muy útil que tiene el programa GeoGebra es la capacidad de permitir la creación de una macro o una herramienta. En este caso necesitamos una herramienta que nos proporcione, dados tres puntos O, U y C, con C en la semirrecta $\overrightarrow{OU}$ (al sentido inducido por esta semirrecta le llamaremos "positivo" o "derecho" y al otro sentido " negativo" o "izquierdo"); una circunferencia centrada en O y con radio de longitud raíz de OC, considerando al segmento OU de longitud unitaria.

Primeramente, necesitamos construir una circunferencia centrada en C y de radio un segmento de longitud $1/4$. Llamemos a esta circunferencia γ.

Como es muy sencilla la construcción del punto medio de un segmento, omitimos la construcción con regla y con compás y la haremos usando una herramienta predefinida del GeoGebra. También usaremos el compás como un transportador de segmentos. En el Apéndice mostraremos cómo transportar segmentos usando un compás antiguo solamente.

Llamemos A y B a los puntos de intersección de la recta OU con γ, en los lados izquierdo y derecho de C, respectivamente. Sea D la otra intersección de la circunferencia de centro C y que pasa por O. Sea E una de las intersecciones de la circunferencia de centro A y que pasa por D, con la perpendicular a OU por O. Notemos que el triángulo rectángulo AOE tiene un cateto de longitud $OC-1/4$ y la hipotenusa de longitud $OC+1/4$. Por esto la circunferencia de centro en O y que pasa por D es la circunferencia buscada.



Creación de una herramienta para resolver gráficamente una ecuación cuadrática con GeoGebra

En este caso necesitamos dos herramientas. Una herramienta que nos proporcione, dados cuatro puntos O, U, B y C, con C en la semirrecta $\overrightarrow{OU}$; una circunferencia centrada en el punto medio del segmento OB y con radio de longitud:

$$\sqrt{(b/2)^2+(\sqrt{c})^2} \qquad (3)$$

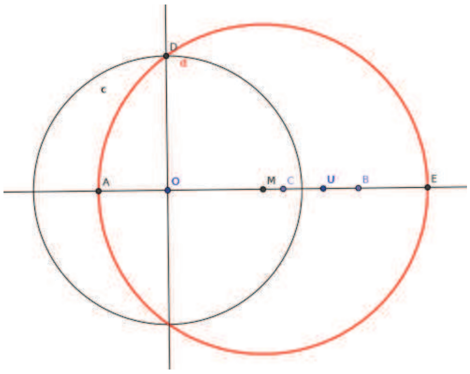
y otra herramienta que construya otra circunferencia con el mismo centro que la anterior pero con radio de longitud:

$$\sqrt{(b/2)^2-(\sqrt{c})^2} \qquad (4)$$

Nótese que (3) es la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos $b/2$ y $\sqrt{c}$ y (4) es la longitud de un cateto de un triángulo rectángulo de hipotenusa $b/2$ y cateto $\sqrt{c}$.

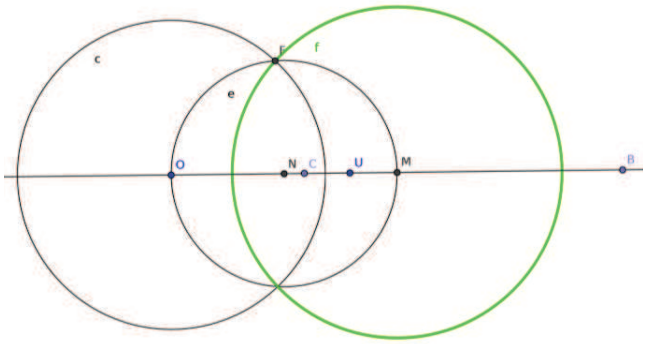
Como ya contamos con una herramienta que construye una circunferencia de radio $\sqrt{c}$ centrada en el origen, si trazamos la perpendicular a la abscisa por el origen y tomamos un punto D en la intersección de esta recta con esta circunferencia, habremos determinado el triángulo rectángulo EOM, con M el punto medio del segmento OB. El segmento ME tiene longitud (3). La circunferencia con centro en M y que pasa por E es la buscada. Observemos que las intersecciones de esta circunferencia con la abscisa tienen por abscisa.

$$\frac{-b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{c}\right)^2}$$



Para la segunda herramienta, a diferencia del procedimiento utilizado anteriormente, en lugar de trazar la perpendicular desde O se traza una circunferencia de diámetro el segmento OM y centro el punto medio de dicho segmento. Sea F una de las intersecciones de la circunferencia de radio $\sqrt{c}$ con la circunferencia que tiene por diámetro al segmento OM. El segmento MF tiene longitud (4). Por lo tanto las abscisas de los puntos de intersección de una circunferencia con centro en M y que pase por F serán:

$$\frac{-b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{c}\right)^2}$$



Referencias

Ivorra, C. (2009). *Geometría*. Recuperado de: http://www.uv.es/ivorra/Libros/Geometria.pdf.

Hungerford, T.W. (1974). *Algebra.* Nueva York, USA: Springer.